ANALYSIS

Regel von de L'Hospital

Text Nr. 51140

Stand 21. August 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Es gibt zahlreiche Funktionen, die bei der Berechnung eines Grenzwertes mit dem Grenzwertsatz Probleme bereiten.

Dann hilft in vielen Fällen der Satz von de L'Hospital weiter. Dies wird hier besprochen.

Anfängliche Beispiele sind für den gymnasialen Einsatz gedacht, spätere Beispiele sind eigentlich für Studenten

Am Ende folgt eine exakte Formulierung des Satzes von Bernoulli und de L'Hospital.

Inhalt

Teil 1 Gymnasium

Teil 2 Eher für Studium

Teil 3 Die Form $\infty-\infty$:

Teil 4 Umwandlung in einen Exponentialterm

Die Form 0^0

Die Form 1^∞

Die Form ∞^0

Andere Grenzwerte:

Teil 5

Teil 1 Empfehlung fürs Gymnasium

Beispiel 1.1: Der unbestimmte Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$.

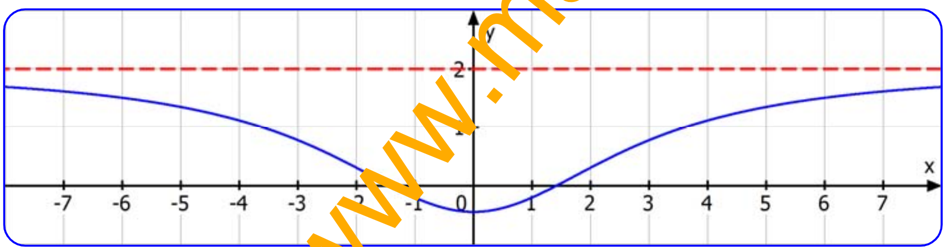
Gesucht ist der Grenzwert $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{2x^2-4}{x^2+9}$. Ein Schüler wendet den Grenzwertsatz so an:

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{2x^2-4}{x^2+9} = \frac{\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(2x^2-4\right)}{\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(x^2+9\right)} = \frac{\infty}{\infty}$$ und ist dann am Ende seiner Weisheit.

1. Lösungsweg: Man kürzt durch die höchste x-Potenz des Nenners:

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{2x^2-4}{x^2+9} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{2-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{9}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(2-\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(1+\frac{9}{x^2}\right)} = \frac{2}{1} = 2$$ denn $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{9}{x^2} = 0$

Jetzt hat der Grenzwertsatz den Grenzwert 2 ergeben.



2. Lösungsweg.

Der französische Mathematiker de L'Hospital (gesprochen: „de Lopidall") hat um 1696 folgendes veröffentlicht:

> **Eine Bruchfunktion hat denselben Grenzwert wie eine andere Bruchfunktion, die dadurch entsteht, dass man Zähler und Nenner getrennt für sich ableitet. (Achtung: Also nicht die Quotientenregel verwenden!)**

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{2x^2-4}{x^2+9} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{4x}{2x} = 2$$

Regel von de L'Hospital

Eine Funktion $h(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ hat für $x \to \pm\infty$ (oder für $x \to 0$) denselben Grenzwert, wie die Funktion h*, die dadurch aus h entsteht, dass man Zähler und Nenner getrennt ableitet.

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{Z(x)}{N(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{Z'(x)}{N'(x)}$$

falls der letzte Grenzwert existiert.

Beispiel 1.2: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+5x-4}{2x^3+3x^2+2x+1}$

Auch hier führt der Grenzwertsatz zum unbestimmten Ausdruck $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Nach de L'Hospital folgt jedoch: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+5x-4}{2x^3+3x^2+2x+1}\overset{\text{Hosp}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+5}{6x^2+6x+2}\to\dfrac{\infty}{\infty}$

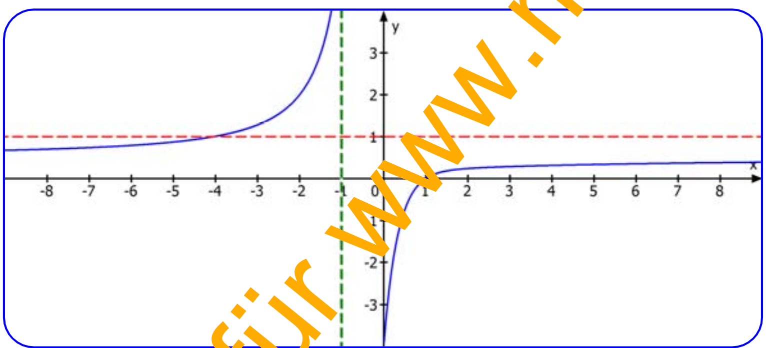
Nächste Anwendung von de L'Hospital $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+5}{6x^2+6x+2}\overset{\text{Hosp}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-4}{12x+6}\to\dfrac{\infty}{\infty}$

Nächste Anwendung von de L'Hospital $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-4}{12x+6}\overset{\text{Hosp}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$

Hier wurde also der Satz von de L'Hospital dreimal nacheinander zur Anwendung gebracht.

Eine Lösung ohne diesen Satz ist so möglich:

$$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+5x-4}{2x^3+3x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1\boxed{-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{4}{x^3}}}{2\boxed{+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}}=\frac{1}{2}\text{, denn }\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{c}{x^3}=0$$



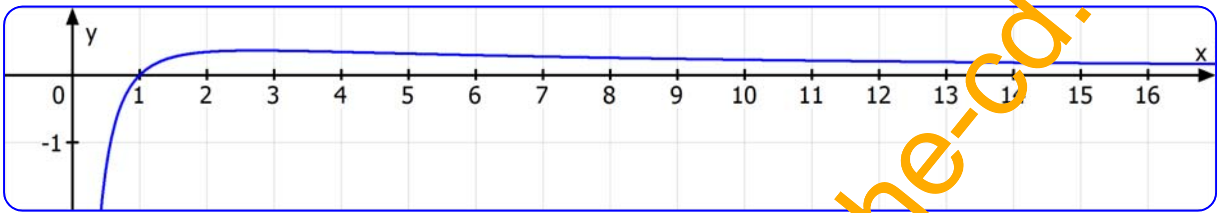
Beispiel 1.3 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

Für $x \to \infty$ erhält man den unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$.

Anwendung des Satzes von de L'Hospital :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{Hosp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Folgerung: Das Schaubild $y = \frac{\ln x}{x}$ hat für $x \to \infty$ die waagrechte Asymptote y = 0 (x-Achse).

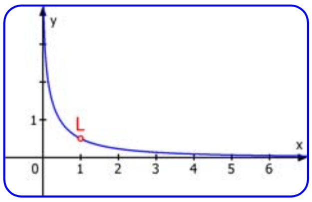


Beispiel 1.4 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1}$

Für $x \to 1$ erhält man den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1} \overset{\text{Hosp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Das Schaubild hat das Loch $L\left(1 \mid \frac{1}{2}\right)$

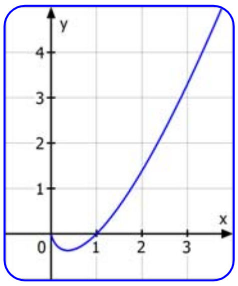


Beispiel 1.5 Der unbestimmte Ausdruck $0 \cdot \infty$.

Der Grenzwert von $f(x) = x \cdot \ln x$ für $x \to 0$ ist problematisch:

$$\underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty}$$

Und so benötigt man wieder die Regel von de L'Hospital.
Man muss jedoch das Produkt in die für de L'Hospital notwendige Bruchform bringen.



$$\lim_{x\to 0}(x \cdot \ln x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-1}} \overset{\text{Hosp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} \cdot x^2\right] = -\lim_{x\to 0} x = 0$$

In einen Bruch verwandeln | De L'Hospital | Potenzrechnung

Beispiel 1.6 Der unbestimmte Ausdruck $\infty \cdot 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-x} = ?}$$

Der Versuch, den Grenzwertsatz auf das Produkt anzuwenden, scheitert so:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-x} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} x}_{\infty} \cdot \underbrace{\lim_{x\to\infty} e^{-x}}_{0}$$

Man wird auf das Produkt "$0\cdot\infty$" geführt, das genauso wie "$\frac{\infty}{\infty}$" keinen eindeutigen Wert hat.

Es hilft jedoch die Regel von de L'Hospital:

1. Schritt: Man verwandelt das Produkt $x\cdot e^{-x}$ in einen Bruch:

$$\boxed{f(x) = x\cdot e^{-x} = \frac{x}{e^x}}$$

2. Schritt:

Dieser Bruch hat für $x\to\infty$ denselben Grenzwert wie die neue Funktion, die dadurch entsteht, dass man den Zähler des Bruches und den Nenner jeweils für sich ableitet (also **nicht** die Quotientenregel anwenden!)

De L'Hospital

In einen Bruch verwandeln

Zurück verwandeln

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

Folgerung:

Die Gerade mit der Gleichung y = 0 ist die waagerechte Asymptote der Kurve $y = x\cdot e^{-x}$ für $x\to\infty$.